MATHS 2 (durée 4 heures)

FILIERES MP, PC, PSI, PT, MT

PROBLEME 1

On se propose dans ce problème d'étudier l'ensemble, noté Σ, des points de l'espace équidistants de deux droites D et D' non coplanaires et orthogonales.

Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A:

1°a) **Donner** une condition nécessaire et suffisante pour qu'une réflexion laisse invariante une droite donnée.
En déduire qu'il existe deux réflexions et deux seulement qui laissent simultanément invariantes les droites D et D': l'une par rapport au plan passant par D et orthogonal à D'en un point B, l'autre par rapport au plan passant par D' et orthogonal à D en un point A .

b) **Montrer que** Σ admet en particulier , deux plans de symétrie et un axe de symétrie .

2°) **Montrer que** l'intersection de Σ avec l'un quelconque de ses plans de symétrie est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.

Partie B:

Dans cette partie, ainsi que dans la partie C l'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
La droite (D) passe par le point A de coordonnées (0,0,1) et admet comme vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.
La droite D' passe par le point B de coordonnées (0,0,-1) et admet pour vecteur directeur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$.

1°) a) **Vérifier que** D et D' sont orthogonales et non coplanaires.
Montrer que le point O appartient à Σ.

b) **Montrer** qu'une représentation paramétrique de D est (x=t; y=t; z=1; t∈**R**).

Soit M un point de coordonnées (x,y,z) et P un point de D, **exprimer** MP^2 comme fonction de t et **en déduire** la distance de M à D.

c) **Calculer** de même la distance du point M à la droite D'.

d) **En déduire** que M appartient à Σ si et seulement si on a : xy+2z=0.

2°) **Déduire** de cette relation

a) que les intersections de Σ avec des plans orthogonaux à la droite (AB) sont en général des hyperboles. **Préciser** le cas d'exception.

b) la nature des intersections de Σ avec des plans orthogonaux à l'axe des x ou à celui des y.

Partie C:

Soit M(t) le point de Σ admettant pour abscisse x(t)=4cost et pour ordonnée y(t)=sin 2t dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Lorsque t varie sur **R** , le point M décrit une courbe Γ incluse dans Σ.

1°) **Construire** la courbe Γ_z projection orthogonale de Γ sur le plan d'équation z=0.

2°) On désigne par Γ_x la projection orthogonale de Γ sur le plan d'équation x=0 et par Γ_y la projection orthogonale de Γ sur le plan d'équation y=0 .

Construire ces courbes après avoir donné une représentation paramétrique de chacune d'elles.

PROBLEME 2

Le but de ce problème est de généraliser la notion d'inverse d'une matrice carrée à coefficients dans **R**

On notera $M_n(R)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients dans **R**, ${}^tM$ la transposée de la matrice M , Tr(M) la trace de la matrice M (somme des coefficients diagonaux).

On associe à tout M de $M_n(R)$ l'endomorphisme ϕ_M de R^n dont la matrice dans la base canonique est M, et on note Im(M) son image et Ker(M) son noyau.

Soit A une matrice non nulle de $M_n(R)$ de rang ρ.

Pour $X \in M_n(R)$ on définit les relations:

(1) AXA=A
(2) XAX=X
(3) AX=XA

Si (1) et (2) sont vérifiées, on dit que X est un inverse faible de A et si (1), (2) et (3) sont vérifiées, on dit que X est un pseudo inverse de A.

PARTIE I

1°) **Montrer que** pour toutes matrices A et B de $M_n(R)$ Tr(AB)=Tr(BA).

2°) Si A'est semblable à A, **montrer que** Tr(A')=Tr(A).

3°) On suppose que A est une matrice de projection(A^2 =A).

Montrer que $\text{Ker } A \oplus \text{Im}(A) = \mathbf{R}^n$

En déduire que TrA = rg(A).

PARTIE II

1) Soit

$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, calculer M^3 et en déduire un inverse faible de M . Est - ce un pseudo - inverse ?

Vérifier que $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est aussi un inverse faible de M . est-ce aussi un pseudo-inverse ?

2) On suppose que X vérifie (1) c'est à dire AXA=A
   a) **Prouver que** AX et XA sont des matrices de projection.
   b) **Prouver que** rg(A) = rg(AX)=rg(XA)=Tr(AX) .
   Remarque :rg(UV)≤inf(rgU,rgV)

3) On suppose A inversible.
   Si X vérifie (1), **prouver que** X est unique et est un pseudo-inverse de A.

4) On suppose que X et X' sont des pseudo-inverses de A.
   a) **Calculer** AXAX'.
   b) **En déduire** AX'=XA puis X=X', **conclure** .

5) En supposant que A admet un pseudo-inverse X. **prouver que** les matrices suivantes ont un pseudo-inverse et **le calculer**: X; λA (λ∈**R***);
A^k $k \in N^*$, ${}^tA$;RAR^{-1} pour R inversible quelconque.

6) On suppose que Im(A)∩Ker(A) ={0}.

   a) **Montrer que** R^n = Im(A) ⊕Ker(A) .

   b) **Montrer que** pour tout v de R^n, il existe w unique de Im(A) tel que $\phi_A(w) - v \in Ker(A)$.

   c) On note $w=\varphi(v)$.

   Montrer que φ est un endomorphisme de R^n et que sa matrice relativement à la base canonique est un pseudo-inverse de A .(On remarquera que $Im\varphi \subset ImA$)

7)On suppose que A admet un pseudo-inverse X.

   a) **Montrer que** Im(X)=Im(A) .; Ker(X)=Ker(A) et R^n = Im(A) ⊕Ker(A) .

   b) **Montrer que** AX est la matrice de projection de R^n sur Im(A) parallèlement à Ker(A).

PARTIE III

Dans cette partie l'espace C^n est muni du produit scalaire $\langle P|P' \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{p_i} p'_i$ avec

$P=(p_1, p_2, \ldots\ldots p_n)$ et $P'=(p'_1, p'_2, \ldots\ldots p'_n)$

Une matrice A d'ordre n à coefficients complexes est dite circulante si elle est de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & & a_n \\ a_n & a_1 & & a_{n-1} \\ & & & \\ & & & \\ a_2 & & & a_1 \end{bmatrix}$$

1°) Soit $C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ Vérifier que I, C, C^2,C^3 sont des matrices circulantes.

2°) Montrer que l'ensemble des matrices circulantes à coefficients complexes d' ordre 4 est un espace vectoriel dont une base est I, C, C^2,C^3 et donner la décomposition d'une matrice circulante quelconque sur cette base.

3°) Soit A une matrice carrée d'ordre 4, **montrer que** A est une matrice circulante si, et seulement si AC=CA .

4°) Déterminer les valeurs propres de C et, pour chaque valeur propre λ_j **déterminer** un vecteur propre U_j de norme 1 qui lui soit associé.

5°) Montrer que les U_i forment une base orthonormale de $\mathbf{C}^4$

6°) Montrer que si A est une matrice circulante U_j est un vecteur propre de A.

Si μ_j est la valeur propre de A associée à ce vecteur, **exprimer** μ_j en fonction de λ_j et des coefficients de la matrice A.

7°) Soit A une matrice circulante d'ordre 4, **déterminer** une base de Ker A et de Im A à l'aide des vecteurs (U_j).

8°) Montrer que $\mathbf{C}^4$ =Ker A $\oplus$Im A et que $(\text{KerA})^{\perp}$ = ImA

9°) Soit B la pseudo-inverse de A

Sachant que comme dans II)7)b) BA est la projection orthogonale de. $\mathbf{C}^4$ sur ImA parallèlement à KerA ; **exprimer** la matrice équivalente à B dans la base (U_j).

On distinguera les cas $\mu_j=0$ et $\mu_j\neq 0$.

10°) Déterminer la pseudo-inverse de $T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ en utilisant la base des vecteurs (U_j).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail